

9 Kombinatorika, teorie pravděpodobnosti a matematická statistika

Ten, kdo argumentuje průměrným platem, je s velkou pravděpodobností vysoce nadprůměrný vůči s hluboce podprůměrným vzděláním

(Miloslav Druckmüller)

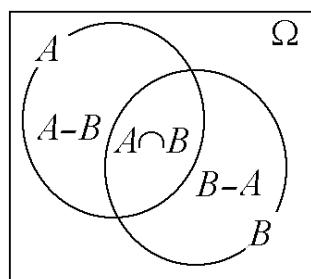
9.1 Kombinatorika

Kombinatorika je matematický obor, který studuje vlastnosti konečných množin a uspořádaných k -tic, kde $k \in \mathbb{N}$. Opírá se o dvě základní pravidla:

Pravidlo součtu: Necht' množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 n_2 prvků, ..., množina A_k n_k prvků, množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$ necht' jsou po dvou disjunktní, tj. pro každé $i, j = 1, \dots, k$ je $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. Pak počet všech prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^k A_i$ je

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Pravidlo součinu: Necht' množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 n_2 prvků, ..., množina A_k n_k prvků. Pak počet všech uspořádaných k -tic $[a_1; a_2; \dots; a_k]$, kde $a_1 \in A_1; a_2 \in A_2; \dots; a_k \in A_k$, je $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^k n_i$ (pozn.: počet prvků množiny A značíme většinou $|A|$).



1. Příklad: Určeme počet prvků množin $A - B$; $B - A$.

Řešení: Množinu A lze zapsat jako sjednocení dvou disjunktních množin $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (viz připojený Vennův diagram), je proto $|A| = |A - B| + |A \cap B|$, odtud $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.

Podobně $B = (B - A) \cup (A \cap B) \Rightarrow |B| = |B - A| + |A \cap B| \Rightarrow$

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|.$$

2. Příklad: Určeme počet prvků množiny $A \cup B$, je-li $A \cap B \neq \emptyset$.

Řešení: Množinu $A \cup B$ lze zapsat jako sjednocení tří disjunktních množin:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A),$$

(viz opět Vennův diagram). Je tedy

$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$$

Protože však $|A - B| = |A| - |A \cap B|$; $|B - A| = |B| - |A \cap B|$ (viz předchozí příklad), je

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B|,$$

tedy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Příklad: Šestnáct fotbalových mužstev hraje ligu systémem každý s každým dvě utkání (doma a venku). Kolik utkání bude celkem odehráno?

Řešení: Množina všech utkání A je sjednocením po dvou disjunktních množin $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{16} = \bigcup_{i=1}^{16} A_i$, kde A_i je množina všech domácích utkání i -tého mužstva.

Každá množina A_i má 15 prvků. Podle pravidla součtu tedy je

$$|A| = \sum_{i=1}^{16} |A_i| = \sum_{i=1}^{16} 15 = 16 \cdot 15 = 240.$$

4. Příklad: Z celkového počtu 1 326 studentů 1. ročníku Fakulty strojního inženýrství v Brně udělalo zkoušku z matematiky 952 studentů, z fyziky 987 studentů, obě zkoušky má 874 studentů.

- Kolik studentů neudělalo zkoušku z matematiky?
- Kolik studentů neudělalo zkoušku z fyziky?
- Kolik studentů udělalo zkoušku z matematiku a neudělalo zkoušku z fyziky?
- Kolik studentů udělalo zkoušku z fyziky a neudělalo zkoušku z matematiky?
- Kolik studentů neudělalo ani jednu zkoušku?

Řešení: Univerzální množinou Ω je v našem případě množina všech studentů 1. ročníku FSI, tj. $|\Omega| = 1\,326$. Množinu všech studentů, kteří udělali zkoušku z matematiky, označme M , je $|M| = 952$, množinu všech studentů, kteří udělali zkoušku z fyziky, označme F , je $|F| = 987$. Dále je $|M \cap F| = 874$. Je tedy:

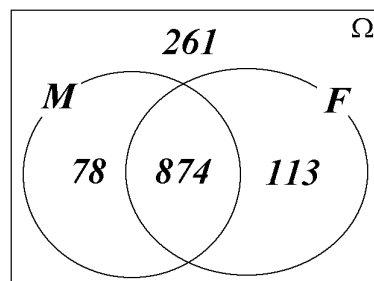
a) $|\Omega - M| = |\Omega| - |\Omega \cap M| = |\Omega| - |M| = 1\,326 - 952 = 374$

b) $|\Omega - F| = |\Omega| - |\Omega \cap F| = |\Omega| - |F| = 1\,326 - 987 = 339$

c) $|M \cap F| \overset{\text{viz kpt. 1.2. př. 1.a)}}{=} |M - F| \overset{\text{viz kpt. př. 1. této kpt.}}{=} |M| - |M \cap F| = 952 - 874 = 78$

d) $|F \cap M| = |F - M| = |F| - |F \cap M| = 987 - 874 = 113$

e) $|\Omega - (M \cup F)| = |\Omega| - |M \cup F| =$
 $= |\Omega| - (|M| + |F| - |M \cap F|) =$
 $= |\Omega| - |M| - |F| + |M \cap F| =$
 $= 1\,326 - 952 - 987 + 874 = 261$



Na připojeném obrázku je celé řešení „rozklíčováno“.

5. Příklad: V prvním osudí je 12 červených míčků, ve druhém 14 zelených a ve třetím 10 modrých. Jednotlivé míčky v osudích jsou rozlišeny (např. očíslovány). Z každého osudí vybereme jeden míček. Kolika způsoby lze výběr provést?

Řešení: Jednotlivá osudí představují množiny $A_1; A_2; A_3$, výběr pak uspořádanou trojici $[a_1; a_2; a_3]$; kde $a_1 \in A_1; a_2 \in A_2; a_3 \in A_3$. Podle pravidla součinu je těchto trojic

$$n = 12 \cdot 14 \cdot 10 = 1\,680$$

V řadě aplikací hraje důležitou roli tzv. přihrádkový princip.

Přihrádkový princip: Necht' množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou po dvou disjunktní, tj. pro každé $i, j = 1, \dots, k$ je $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, množina A je jejich sjednocením, tj.

$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Má-li množina A více než k prvků (tj. $|A| > k$), pak alespoň jedna z množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ má více než jeden prvek.

Množina A zde představuje skříňku s k zásuvkami $A_1, A_2, \dots, A_k$. Máme-li do těchto zásuvek rozdělit více než k předmětů, pak alespoň do jedné zásuvky musíme dát nejméně dva předměty.

6. Příklad: Člověk má na hlavě nejvýše 500 000 vlasů. Dokažte, že alespoň dva obyvatelé Prahy mají stejný počet vlasů.

Řešení: Množina A je množina všech obyvatel Prahy, počet jejích prvků je přes milion. Všechny tyto obyvatele rozdělíme do skupin - množin $A_0; A_1; A_2; \dots; A_k$ podle počtu vlasů - A_0 úplně plešatí, A_1 s jedním vlasem, atd. Protože nejvyšší možný počet vlasů je 500 000, je $k \leq 500\,000$, maximální počet skupin je tedy 500 001. Máme-li do těchto skupin rozdělit přes milion lidí, musí podle přihrádkového principu alespoň jedna skupina obsahovat nejméně dva lidi - tj. nejméně dva lidé mají stejný počet vlasů (do „již obsazených“ skupin je třeba přidat dokonce nejméně půl milionu lidí).

Permutace z n prvků: je každá uspořádaná n -tice sestavená z n prvků.

Jinými slovy: Permutace z n prvků je libovolné uspořádání n -prvkové množiny.

7. Příklad: Je dána množina $A = \{1; 2; 3\}$. Jejími permutacemi jsou uspořádané trojice

$$[1; 2; 3]; [1; 3; 2]; [2; 1; 3]; [2; 3; 1]; [3; 1; 2]; [3; 2; 1].$$

V předchozím příkladě jsme vypsali **všechny** permutace tříprvkové množiny A (těchto permutací je šest). Určíme počet všech permutací obecně n prvkové množiny. Představme si skupinu n studentů, jejichž uspořádání je určeno rozesazením v učebně s n místy. Studenti postupně přicházejí a usedají v učebně. První přichodzí má na výběr n míst, druhý již jen $n-1$ míst, třetí $n-2$ míst atd., poslední má pak na „výběr“ poslední místo, které zbylo. Množinu všech možných výběrů prvního studenta označme A_n (ta má n prvků); množinu všech možných výběrů druhého studenta A_{n-1} (ten vybírá z $n-1$ míst), ..., množina všech "výběrů" posledního studenta je pak A_1 . Množina A_n má zřejmě n prvků, A_{n-1} $n-1$ prvků, ..., A_1 má jediný prvek (poslední student již obsadí místo, které na něj zbude). Označíme-li počet všech možných rozesazení (permutací) n studentů $P(n)$, je podle pravidla součinu

$$P(n) = |A_n| \cdot |A_{n-1}| \cdot |A_{n-2}| \cdot \dots \cdot |A_2| \cdot |A_1| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Toto číslo se v aplikacích vyskytuje velmi často a nazýváme ho faktoriál:

Faktoriál: Faktoriálem z přirozeného čísla $n > 0$ rozumíme číslo

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Pro zjednodušení mnoha zápisů je účelné definovat faktoriál i pro nulu: $0! = 1$.

Počet permutací n prvkové množiny je tedy

$$P(n) = n!$$

8. Příklad: Kolik různých pěticiferných čísel můžeme sestavit z cifer 1; 2; 3; 4; 5, jestliže se žádná cifra nemá opakovat?

Řešení: Každé takové číslo představuje permutaci pěti prvků. Těchto permutací je

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

9. Příklad: Kolika způsoby je možno rozesadit šedesát studentů na šedesát míst v posluchárně?

Řešení: Těchto permutací je

$$60! = 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \approx 8,32 \cdot 10^{81}$$

(to je obrovské číslo. Jeden z možných modelů vesmíru tvrdí, že přibližně tolik je elementárních částic v celém vesmíru...)

10. Příklad: Vypočtěme:

$$\text{a) } \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14!}{14! \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 15 = 120$$

$$\text{b) } \frac{21!}{20! - 19!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19!}{20 \cdot 19! - 19!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19!}{19! \cdot (20 - 1)} = \frac{21 \cdot 20}{19} = \frac{420}{19}$$

$$\text{c) } \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{(n+4)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+1)!} &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = \\ &= (n+4)(n+3) - (n+2) = n^2 + 7n + 12 - n - 2 = n^2 + 6n + 10 \end{aligned}$$

Variace k -té třídy z n prvků: Vraťme se k našemu modelovému příkladu s obsazováním učebny. Představme si podobnou situaci: studenti mají obsazovat učebnu s n místy, ale je jich méně než n – dejme tomu k , tedy $k < n$. Ti mají postupně na výběr: první n míst; druhý $n-1$ míst; třetí $n-2$; ...; k -tý pak $n-(k-1) = n-k+1$ míst. Označíme-li $V(k, n)$ počet možných rozesazení - variací k -té třídy z n prvků, je podle pravidla součinu

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Tento vztah se většinou rozšiřuje výrazem $(n-k)!$:

$$V(k, n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!}$$

a uvádí se tedy ve tvaru

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

11. Příklad: Při cvičeních z matematiky obsazuje studijní skupina jedenadvaceti studentů učebnu, ve které je pětadvacet míst. Kolika způsoby se mohou posadit?

Řešení: Máme určit počet variací jedenadvacáté třídy z pětadvaceti prvků. Podle předchozí úvahy je

$$V(21, 25) = \frac{25!}{(25-21)!} = \frac{25!}{4!} \approx 6,46 \cdot 10^{23}$$

Kombinace k -té třídy z n prvků: Řešme obecně úlohu, kolika způsoby je možné vyplnit sázkový tiket, který obsahuje n čísel, máme-li zaškrtnout právě k čísel (i zde je pochopitelně $k < n$). Na první pohled je situace stejná, jako při obsazování učebny — k křížky postupně „obsadíme“ n čísel. Je zde však podstatný rozdíl. Při obsazení učebny jsme rozlišovali nejen

to, která místa jsou obsazena a která ne, ale také pořadí studentů na obsazených židlích - zda Petr sedí u okna a Pavel u dveří, nebo zda je to naopak. Na vyplněné sázence je jedno, zda jsme zaškrtnli nejprve dvojku a potom dvanáctku, či naopak. Zde nerozlišujeme pořadí výběru. Výběr k prvků z n prvkové množiny bez ohledu na pořadí výběru (tj. vlastně libovolnou k prvkovou podmnožinu n prvkové množiny) nazýváme kombinací k -té třídy z n prvků. Počet těchto kombinací označujeme $K(k, n)$. Pokud bychom rozlišovali pořadí zaškrťování čísel, počet možností bude dán opět počtem variací k -té třídy z n prvků. Nechceme-li pořadí rozlišovat, musíme všechny případy, které se liší jen pořadím výběru, prohlásit za případ jediný. Protože vybíráme k prvků, je počet případů, které se liší jen pořadím výběru, rovno počtu permutací z k prvků, tj. $k!$. Právě tolikrát bude méně možností. Platí tedy:

$$K(k, n) = \frac{V(k, n)}{k!}$$

neboli

$$K(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Toto číslo hraje opět důležitou roli v řadě aplikací. Nazývá se **kombinační číslo** a často se značí

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad (\text{čteme } n \text{ nad } k).$$

12. Příklad: Kolika způsoby lze vyplnit sázenu s devětačtyřiceti čísly, máme-li zaškrtnout šest čísel?

Řešení: Podle předchozí úvahy máme určit počet kombinací šesté třídy z devětačtyřiceti prvků, tj.

$$K(6, 49) = \frac{49!}{(49-6)!6!} = \frac{49!}{43!6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 43!} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 12 \cdot 11 = 13\,983\,816$$

Některé vlastnosti kombinačních čísel (předpokládáme $n, k \in \mathbb{N}; k < n$):

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!}{(n-k) \cdot (n-k-1)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1) \cdot k!} = \\ &= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{(k+1+n-k) \cdot n!}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(k+1)]! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Shrnutí: pro každé $n, k \in \mathbb{N}; k < n$ platí

$$\boxed{\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

13 Příklad: Vypočtěme:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{n!}{(n-3)!} + \binom{n}{2} &= \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{2(n-2)n! + n!}{2(n-2)(n-3)!} = \frac{(2n-4+1)n!}{2(n-2)(n-3)!} = \\ &= \frac{(2n-3)n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(2n-3)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{13}{7} + \binom{13}{8} - \frac{1}{2} \cdot \binom{14}{8} - \frac{1}{2} \cdot \binom{14}{7} &= \underbrace{\binom{13}{7} + \binom{13}{8}}_{=\binom{14}{8}} - \frac{1}{2} \cdot \binom{14}{8} - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\binom{14}{7}}_{=\binom{14}{8}} = \\ &= \binom{14}{8} - \frac{1}{2} \cdot \binom{14}{8} - \frac{1}{2} \cdot \binom{14}{8} = 0 \end{aligned}$$

14 Příklad: Řešme rovnici:

$$\begin{aligned} \binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} &= 4 \\ \frac{(x-1)!}{[(x-1)-(x-2)]!(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{[(x-2)-(x-4)]!(x-4)!} &= 4 \\ \frac{(x-1)!}{1!(x-2)!} + \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} &= 4 \\ \frac{(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{2(x-4)!} &= 4 \\ x-1 + \frac{(x-2)(x-3)}{2} &= 4 \\ 2x-2+x^2-5x+6 &= 8 \\ x^2-3x-4 &= 0 \\ x_1 &= 4; x_2 = -1. \end{aligned}$$

Z nalezených kořenů vyhovuje jen první z nich, neboť zadanou rovnici lze řešit pouze pro $x \in \mathbb{N}; x \geq 4$.

Neřešené úlohy:

Upravte:

1) $\frac{n!}{(n-2)!}$

3) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

5) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

2) $\frac{(n+1)!}{n!}$

4) $\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

6) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$

Vypočtěte

7) $\binom{12}{3} + \binom{12}{4}$

8) $\binom{10}{2} + \binom{10}{7}$

9) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

10) Řešte rovnici

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

11) Deset šachistů hraje turnaj systémem každý s každým jednu partii. Kolik partií bude na turnaji odehráno?

12) Monitor počítače pracuje v barevném systému *RGB* – všechny barvy jsou míchány z červené, zelené a modré složky, přičemž každá složka má k dispozici 1 byte paměti, tj. 256 hodnot.

a) Kolik barev je na tomto monitoru k dispozici?

b) Na tomto monitoru prohlížíme obraz s rozlišením $5\,000 \times 4\,000$ pixelů (obrazových bodů). Dokažte, že v tomto obraze existují alespoň dva pixely obarvené stejnou barvou!

13) Kolik různých fotografií lze teoreticky pořídit digitálním fotoaparátem s rozlišením dva megapixely? (fotoaparát pracuje v režimu *RGB* z předchozího příkladu)

14) Uvažujme čtyřciferná čísla, jejichž cifry určujeme hodem hrací kostkou. Kolik takových čísel existuje?

15) Házíme desetkrát mincí. Padne-li orel, píšeme jedničku, padne-li panna, píšeme nulu. Kolik různých čísel můžeme tímto způsobem napsat?

16) Sestavte pěticeforné číslo, jehož první cifra je lichá, druhá sudá, třetí dělitelná šesti, čtvrtá větší než tři a pátá libovolná. Kolik řešení má úloha?

17) Kolika způsoby je možno rozmíchat balíček dvaatřiceti karet?

18) Kolik různých čtyřúhelníků je možné sestavit, vybíráme-li jejich vrcholy z jedenácti různých bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce?

19) Kolika přímkami lze spojit deset bodů, jestliže právě tři z nich leží na jedné přímce?

Výsledky

1) $n(n-1)$ 2) $n+1$ 3) $n(n+1)$ 4) n^3 5) $\frac{n}{(n+1)!}$ 6) n 7) 715 8) 165 9) 16 10) 5 11) 45

12) a) 16 777 216 b) použijte přihrádkový princip - na obarvení 20 000 000 pixelů máme 16 777 216 barev 13) $16\,777\,216^{2 \cdot 10^6}$ 14) 1 296 15) 1 024 16) 3 000 17) $32! \approx 2.6 \cdot 10^{35}$ 18) 330 19) 43

9.2 Binomická věta

Při umocňování dvojčlenu (binomu) na n -tou ($n \in \mathbb{N}$) lze použít binomickou větu:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

neboli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1. Příklad: Umocňme $(a+b)^5$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } (a+b)^5 &= a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5 = \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

2. Příklad: Umocňme $(2m^2 + 3n^3)^5$.

Řešení: Dosazením $a = 2m^2$; $b = 3n^3$ do předchozího příkladu dostaneme:

$$\begin{aligned} (2m^2 + 3n^3)^5 &= (2m^2)^5 + 5 \cdot (2m^2)^4 \cdot (3n^3) + 10 \cdot (2m^2)^3 \cdot (3n^3)^2 + 10 \cdot (2m^2)^2 \cdot (3n^3)^3 + \\ &+ 5 \cdot (2m^2) \cdot (3n^3)^4 + (3n^3)^5 = 32m^{10} + 240m^8n^3 + 720m^6n^6 + 1080m^4n^9 + 810m^2n^{12} + 243n^{15} \end{aligned}$$

Velmi často potřebujeme z celého binomického rozvoje jen k -tý člen:

$$A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}.$$

3. Příklad: Určete třetí člen rozvoje výrazu $(1-2a)^5$.

$$\text{Řešení: } A_3 = \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot (-2a)^2 = 40a^2$$

4. Příklad: Určete x tak, aby sedmý člen rozvoje $(\sqrt{x} - i\sqrt[3]{2})^{10}$ byl roven číslu $-8,4$.

$$\text{Řešení: Máme } A_7 = \binom{10}{6} \cdot (\sqrt{x})^4 \cdot (-i\sqrt[3]{2})^6 = \frac{10!}{4!6!} x^2 \cdot 4i^6 = -840x^2$$

$$\begin{aligned} \text{tedy } -840x^2 &= -8,4 \\ x_{1,2} &= \pm 0,1 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\sqrt{x}$ v zadání je zřejmě reálná, vyhovuje pouze $x = +0,1$.

Neřešené úlohy:

1) Umocněte **a)** $(2+a)^6$ **b)** $(1-i)^{10}$

2) Určete desátý člen rozvoje mocniny $(1-x^2)^{12}$

3) Určete číslo x , je-li desátý člen rozvoje $(\sqrt[3]{x} - i\sqrt[4]{3})^{10}$ roven $5\,670$.

- 4) Určete čísla x, y , jejichž rozdíl je $x - y = \frac{1}{2}$ a pro něž je osmý člen rozvoje $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y})^{11}$ je 990.

Výsledky

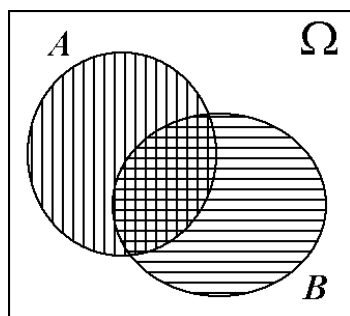
- 1) a) $64 + 192a + 240a^2 + 160a^3 + 60a^4 + 12a^5 + a^6$ b) $-32i$ 2) $-220x^{18}$ 3) 5 670
4) $x = 2; y = 1.5$

9.3 Základy teorie pravděpodobnosti

V přírodních a technických vědách provádíme experimenty, které při zachování stejných podmínek vedou ke stejnému výsledku. Upustíme-li kámen z výšky $h = 4,9 \text{ m}$ v místě, kde je gravitační zrychlení $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$, dopadne vždycky za jednu sekundu. Shoří-li dva gramy vodíku, dostaneme vždy 18 gramů vody. Ve výzkumu i běžném životě se však setkáváme s pokusy, které i při dodržení stanovených podmínek mohou vést k různým výsledkům. Hodíme-li dvakrát po sobě hrací kostkou, dostáváme většinou dva různé výsledky, i když jsme hodili „úplně stejně“. Projde-li výstupní kontrolou sto bezvadných výrobků a sto první bude vadný, pak další vadný výrobek sotva bude výrobek číslo 202, ale možná 194, nebo 205, nebo také 729 (nebo možná už vůbec žádný). Tyto jevy jsou dány působením několika (někdy velmi mnoha) vlivů, jejichž přesný popis není prakticky proveditelný. Proto jsou výsledky konkrétních pokusů (jednoho hodu kostkou, vadnost či bezvadnost konkrétního výrobku) nepředvídatelné. Souhrnu prakticky nepředvídatelných a nepopsatelných vlivů říkáme náhodné vlivy nebo stručně **náhoda**. Pokus, který probíhá za stejných popsatečných podmínek, ale přesto má „nejistý“ výsledek vlivem náhody, nazýváme **náhodný pokus**. I když jednotlivé výsledky náhodného pokusu nelze předpovědět, přesto se v nich objevují jisté zákonitosti, které lze matematicky popsat. Tímto matematickým popisem se zabývá **teorie pravděpodobnosti**.

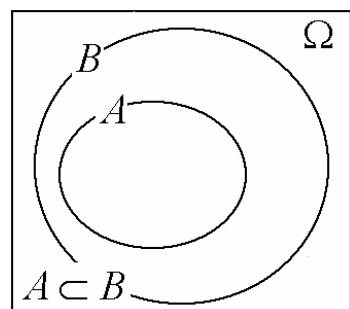
Především je nutno matematicky popsat množinu všech možných výsledků náhodného pokusu. U hodu hrací kostkou to bude množina šestiprvková, nejlépe množina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. U výstupní kontroly množina dvouprvková $\Omega = \{\text{vadný}; \text{bezvadný}\}$; při hodu jednou mincí opět dvouprvková $\Omega = \{\text{panna}; \text{orel}\}$ (v podobných případech je možné vzít samozřejmě množinu $\Omega = \{0, 1\}$). Při hodu kostkou však mohou očekávat nejen konkrétní číslo, ale také jiný výsledek. Jestliže se se mnou někdo vsadil, že hodí šestku, a tudíž očekává, že šestku hodí, pak já očekávám, že šestku nehodí, tj. jako „výsledek“ pokusu očekávám, že padne některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5 – tedy vlastně podmnožinu příslušné množiny Ω . Libovolná podmnožina množiny Ω reprezentuje (**náhodný**) **jev – tvrzení o výsledku pokusu**. Při hodu kostkou např. množina $A = \{2, 4, 6\}$ reprezentuje jev „padne sudé číslo“, množina $B = \{0\}$ při výstupní kontrole reprezentuje jev „výrobek je vadný“. O tomto tvrzení lze (po provedení pokusu) rozhodnout, zda je pravdivé – **jev nastal** anebo nepravdivé – **jev nenastal**. Jev „padne sudé číslo“ lze popsat pomocí jevů „jednodušších“ – lze říci „padne dvojka, čtverka nebo šestka“. Jev „padne šestka“ již takto „rozložit nejde“. Tyto jevy (jednoprvkové podmnožiny množiny Ω) nazýváme **elementární jevy**. Speciálními jevy jsou **jev jistý** (jev reprezentovaný celou množinou Ω) a **jev nemožný** (jev reprezentovaný prázdnou množinou).

Reprezentace náhodných jevů množinami je zvláště názorná v následujícím příkladě:

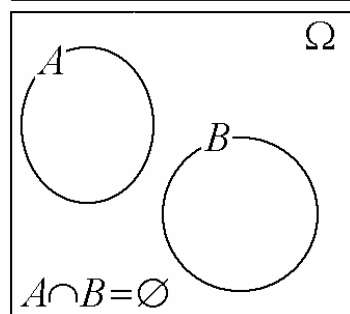


1. Příklad: Mějme Vennův diagram pro dvě množiny, který je používán jako terč pro vrhání šipek. Jev A pak znamená „zasáhnu množinu A “ (zde je třeba předpokládat, že terč je dostatečně velký a **každým** hodem zasáhnu alespoň množinu Ω).

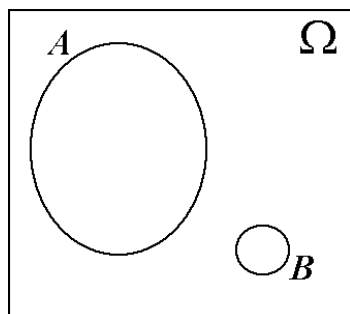
Lze-li jevy výše uvedeným způsobem reprezentovat množinami, pak na jednotlivých jevech lze zavést známé množinové vztahy operace:



Sjednocení jevů A, B je jev $A \cup B$, který nastane právě tehdy, když nastane jev A nebo jev B . (Hrací kostka: jev „padne číslo menší než šest“ je sjednocením jevů „padne liché číslo“ a jevu „padne dvojka nebo čtverka“. Zásahy terče: zasáhnu obraz množiny $A \cup B$, tj. šrafovanou oblast).



Průnik jevů A, B je jev $A \cap B$, který nastane právě tehdy, když nastanou současně jevy A, B (jev „padne dvojka“ je průnikem jevů „padne sudé číslo“ a „padne číslo menší než čtyři“. Zásahy terče: zasáhnu obraz množiny $A \cap B$, tj. dvojité šrafovanou oblast).



Opačný jev k jevu A je jev A' , pro který platí $A' = \Omega - A$ (Hrací kostka: opačný jev k jevu „padne liché číslo“ je jev „padne sudé číslo“. Zásahy terče: opačný jev k jevu „zasáhnu obraz množiny A “ je „zasáhnu obraz množiny A' – doplňku množiny A “; jev opačný k jevu $A \cup B$ je „zasáhnu nešrafovanou oblast“).

Jev A je **podjevem** jevu B ($A \subseteq B$) právě tehdy, když jev B nastane vždy, když nastane jev A (Hrací kostka: jev „padne dvojka“ je podjevem jevu „padne sudé číslo“. Zásahy terče: Jev „zasáhnu A “ je podjevem jevu „zasáhnu B “).

Neslučitelné jevy: Jev A je neslučitelný s jevem B právě tehdy, když $A \cap B = \emptyset$ (Hrací kostka: jev „padne sudé číslo“ je neslučitelný s jevem „padne liché číslo“. Zásahy terče: jev „zasáhnu A “ je neslučitelný s jevem „zasáhnu B “)

Pravděpodobnost: Některé náhodné jevy nastávají častěji než jiné, říkáme, že jsou pravděpodobnější. Pravděpodobnost je ohodnocení jevu reálným číslem, které je tím větší, čím větší „naději na úspěch“ jev má. Očekávám-li při hodu kostkou šestku, mám menší naději na úspěch než když očekávám libovolné sudé číslo. Házím-li do terče na posledním obrázku, mám větší naději, že trefím množinu A , než kdybych měl trefit množinu B .

V matematice nazýváme pravděpodobností každé ohodnocení náhodného jevu, které má následující vlastnosti:

1. Ohodnocení (pravděpodobnost) každého jevu je nezáporné (tj. větší nebo rovno nule).
2. Ohodnocení (pravděpodobnost) jistého jevu je rovno jedné.
3. Ohodnocení (pravděpodobnost) sjednocení dvou neslučitelných jevů je rovno součtu ohodnocení (pravděpodobností) těchto dvou jevů.

Konkrétní zavedení pravděpodobnosti závisí na tom, zda množina elementárních jevů je konečná nebo nekonečná. Házíme-li hrací kostkou, je množina elementárních jevů šestiprvková (tedy konečná). Házíme-li šipkou do terče, je množina elementárních jevů nekonečná. Elementárním jevem je totiž zásah jednoho konkrétního bodu a těchto bodů je na terči nekonečně mnoho. Házím-li hrací kostkou a nešvindluji (např. tak, že kostku pouštím z malé výšky stále na tutéž stěnu), mají všechna čísla stejnou naději na úspěch (musí mít stejnou pravděpodobnost). Jedná se o šest neslučitelných jevů – pravděpodobnost jejich sjednocení je součtem šesti stejně velkých pravděpodobností (bod 3). Sjednocením těchto jevů je jev jistý, který musí mít pravděpodobnost rovnu jedné. Součet šesti stejných čísel má být jednička, pravděpodobnost elementárního jevu je tedy jedna šestina, Pravděpodobnost sjednocení čtyř elementárních jevů (např. padne číslo menší než pět) jevu jsou čtyři šestiny atd. Podobnou úvahu bychom mohli zopakovat u řady dalších případů. V nich můžeme definici pravděpodobnosti vyslovit poněkud konkrétněji:

Je-li množina všech výsledků náhodného pokusu konečná a elementární jevy jsou stejně možné, pak pravděpodobnost jevu A je číslo

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|\Omega|$ je počet prvků množiny Ω (tj. počet všech elementárních jevů) a $|A|$ je počet prvků množiny A , tj. počet elementárních jevů, které jev A realizují (jsou mu příznivé).

1.Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne liché číslo a přitom nepadne jednička?

Řešení: Počet elementárních jevů (možných výsledků) je šest, příznivé jevy jsou dva (naš jev realizuje padnutí trojky a pětky). Je tedy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

V případě náhodného zasahování terče je pravděpodobnost zásahu přímo úměrná obsahu útvaru, který máme zasáhnout. Je ji možno definovat jako poměr plošného obsahu zasahovaného útvaru a plošného obsahu celého terče. V příkladech se budeme věnovat jen případům, kdy množina výsledků pokusů je konečná. Příklad s terčem nám posloužil pro svoji názornost při objasňování množinových operací s jevy. Ještě se však o něm zmíníme při objasňování některých vlastností pravděpodobnosti, které se poněkud vymykají běžné zkušenosti.

2.Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne na obou kostkách sudé číslo?

Řešení: Počet všech možných výsledků určíme podle kombinatorického pravidla součinu: Označíme Ω_1 množinu všech výsledků první kostky, Ω_2 množinu všech výsledků druhé kostky, pak množina našich výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic $[a; b]$, kde $a \in \Omega_1$; $b \in \Omega_2$. Podle pravidla součinu je těchto dvojic $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = 6 \cdot 6 = 36$. Množinu všech příznivých výsledků můžeme v tomto případě určit podobným způsobem: Množina A_1 všech příznivých výsledků na první kostce je tříprvková, rovněž množina A_2 „příznivá“ na druhé kostce má tři prvky. Počet prvků množiny A všech příznivých výsledků je tedy v tomto případě $|A| = |A_1| \cdot |A_2| = 3 \cdot 3 = 9$ a hledaná pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Všimněme si: Pravděpodobnost, že sudé číslo padne na první kostce, je $P(A_1) = 0,5$, pravděpodobnost, že totéž nastane na druhé kostce, je $P(A_2) = 0,5$. Pravděpodobnost, že sudé číslo padne na obou kostkách současně, je $P(A) = 0,25$. V tomto případě tedy je $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. V případě hodu dvěma kostkami je možno jev A_1 formulovat takto „na první kostce padne sudé, na druhé libovolné“. Podobně A_2 : „na druhé kostce padne sudé, na první libovolné“. V tom případě je ovšem $A = A_1 \cap A_2$ a lze tedy psát

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}.$$

Tento vztah platí ovšem pouze v případě, že výsledky pokusů na sobě nejsou závislé. Kostky o sobě navzájem „nevědí“. Takové jevy nazýváme **jevy nezávislé**. Jinými jevy se v tomto textu zabývat nebudeme.

3.Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že

- a) při hodu dvěma kostkami padne součet pět;
- b) při hodu třemi kostkami součet jedenáct;
- c) při hodu třemi kostkami součet dvanáct.

Řešení:

Časté **chybné řešení:**

a) Počet všech možných výsledků je $|\Omega| = 36$.

Součet pět dostaneme, padne-li jednička a čtverka nebo dvojka a trojka. Je tedy $|A| = 2$;

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

b) Počet všech možných výsledků je $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, součtu jedenáct je příznivých šest výsledků: $A_1 = \{4; 4; 3\}$; $A_2 = \{4; 5; 2\}$; $A_3 = \{4; 6; 1\}$; $A_4 = \{5; 5; 1\}$; $A_5 = \{5; 3; 3\}$;

$$A_6 = \{6; 3; 2\}. \text{ Je tedy } |A| = 6; P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

c) I zde je $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, součet dvanáct opět realizuje šest trojic: $A_1 = \{4; 4; 4\}$; $A_2 = \{4; 5; 3\}$; $A_3 = \{4; 6; 2\}$; $A_4 = \{5; 5; 2\}$; $A_5 = \{5; 6; 1\}$; $A_6 = \{6; 3; 3\}$. Je tedy opět $|A| = 6$;

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Hledané pravděpodobnosti jsou ve skutečnosti vyšší. Chyba spočívá v tom, že na výsledky pokusů je pohlíženo chybně pouze jako na **dvojice** a nikoliv správně jako na **uspořádané dvojice**.

Správné řešení:

V případě a) součet pět nerealizují dva, ale čtyři jevy, $A = \{[4; 1]; [3; 2]; [2; 3]; [1; 4]\}$. Je totiž třeba rozlišit např. dvojice $[4; 1]$ - čtverka na první kostce (která může být např. červená) a $[1; 4]$ - čtverka na druhé kostce (která může být např. modrá). Máme tedy $|A| = 4$ a

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

b) Podobně zde: součet jedenáct nerealizuje jen jedna trojice $4; 4; 3$, ale tři uspořádané trojice $[4; 4; 3]; [4; 3; 4]; [3; 4; 4]$, uspořádaných trojic s prvky $4; 5; 2$ je dokonce šest. Na jev „padly dvě čtverky a jedna trojka (bez ohledu na pořadí)“ je tedy třeba pohlížet buď jako na

sjednocení tří elementárních jevů, z nichž každý má pravděpodobnost $\frac{1}{216}$ nebo prostě jako na jednu možnost, která má ovšem pravděpodobnost $\frac{3}{216}$. Hledaná pravděpodobnost je pak

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) = \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}.$$

c) Zcela analogicky je zde

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) = \frac{1}{216} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{3}{216} = \frac{25}{216}.$$

Vlastnosti pravděpodobnosti:

a) Pro pravděpodobnost libovolného jevu A je

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}.$$

Protože jevy A , A' jsou neslučitelné, je podle 3) $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$. Protože však $A \cup A' = \Omega$, je $P(A) + P(A') = P(\Omega)$. Podle 2) je však $P(\Omega) = 1$, tedy $P(A) + P(A') = 1$. Z toho plyne

b)
$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}.$$

Protože jev nemožný ($\emptyset$) je opačný jev k jevu jistému (Ω), je podle b) $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$, tedy

c)
$$\boxed{P(\emptyset) = 0}.$$

Pozor! Tvrzení o pravděpodobnosti jistého a nemožného jevu jsou tvrzení tvaru implikace:

Jestliže A je jev nemožný, pak $P(A) = 0$

Jestliže A je jev jistý, pak $P(A) = 1$.

Nemožnost resp. „jistota“ jevu jsou **postačující podmínkou** nulové resp. jednotkové pravděpodobnosti. **Nejsou však podmínkou nutnou**, tj. obrácené věty:

— Jestliže $P(A) = 0$, pak A je jev nemožný. —

— Jestliže $P(A) = 1$, pak A je jev jistý. —

neplatí.

Proč tato tvrzení neplatí, objasníme na našem příkladu s terčem. Zde jsme pravděpodobnost zásahu oblasti definovali jako poměr obsahu oblasti, kterou máme zasáhnout k obsahu celého terče. Náhodný pokus bude spočívat v zasažení bodu. Protože „plošný obsah bodu“ je nulový, je pravděpodobnost zasažení předem daného bodu nulová. Přesto není zásah bodu nemožný (nějaký bod dokonce zasahujeme každým pokusem). Opačný jev - totiž že předem daný bod nezasáhneme, má pravděpodobnost rovnu jedné, a přesto to není jev jistý.

Pro konečné množiny jsme v kpt. 9.1 ukázali, že $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Pro náhodné jevy s konečným počtem výsledků musí tedy platit

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Lze ukázat, že stejné tvrzení platí i v případě, že množina všech výsledků není konečná. Platí tedy obecně:

d)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

3) Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti mincemi padnou právě tři hlavy?

Řešení: Každý hod mincí představuje nezávislý náhodný jev se dvěma možnými výsledky. Při hodu šesti mincemi je tedy možných $|\Omega| = 2^6 = 64$ výsledků. Příznivý výsledek - právě tři hlavy ze šesti - je kombinace třetí třídy ze šesti prvků. Je tedy $|A| = K(3, 6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

a $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$

4. Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami nepadne součet jedenáct?

Řešení: V příkladu 3b) jsme spočítali pravděpodobnost jevu A : při hodu třemi kostkami součet jedenáct padne: $P(A) = \frac{1}{8}$. Zde uvažujeme jev opačný, jeho pravděpodobnost tedy je

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$

5. Příklad: Jaká je pravděpodobnost výhry první (třetí) ceny ve sportce?

Řešení: V příkladu 12 kpt. 9.1. jsme spočítali, že všech možností, jak sázenku vyplnit, je 13 983 816. Chceme-li první cenu, je příznivý jev jeden jediný, pravděpodobnost je tedy $P(A) = 1 : 13\,983\,816 \approx 7.15 \cdot 10^{-8}$. V případě třetí ceny (máme uhodnout čtyři čísla ze šesti)

zjistíme počet příznivých jevů jako počet kombinací, tedy $|A| = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ a tedy

$P(A) = 5 : 13\,983\,816 \approx 3,58 \cdot 10^{-7}$

Neřešené úlohy:

1) Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu třemi mincemi padne

a) právě jeden líc b) právě na dvou mincích líc

2) V sáčku je dvanáct kuliček červených a osm modrých. Jaká je pravděpodobnost, že při vytažení pěti kuliček jsou a) tři červené, dvě modré? b) dvě červené, tři modré? c) všechny červené? d) všechny modré?

3) Ze hry 32 karet bylo vytaženo pět karet. Jaká je pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi jsou a) čtyři esa? b) tři esa? c) dvě esa? d) jedno eso? e) žádné eso?

4) Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu dvěma kostkami padne součet pět nebo šest?

5) Jaká je pravděpodobnost, že při vrhu třemi kostkami nepadne součet deset ani jedenáct?

6) V tombole je sto losů a deset výher. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jeden los vyhrajeme, máme-li a) dva losy? b) tři losy? c) deset losů?

7) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolené dvojčíferné číslo

a) je dělitelné třinácti?

b) má ciferný součet větší než patnáct?

8) Při zkoušce se ze třiceti otázek náhodně vyberou tři. Student se připravil na 70% otázek. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví právě dvě otázky?

9) Ve vyrobené sérii padesáti součástek je šest zmetků. Náhodně bylo vybráno deset součástek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi jsou právě dva zmetky?

Výsledky:

1) a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ 2) a) $\frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{20}{5}} \approx 0,397$ b) $\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{20}{5}} \approx 0,238$

c) $\frac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0,051$ d) $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0,004$ 3) a) $28 / \binom{20}{5} \approx 0,0001$

b) $\frac{\binom{4}{3} \binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} \approx 0,008$ c) $\frac{\binom{4}{2} \binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} \approx 0,098$ d) $4 \cdot \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}} \approx 0,407$ 4) $\frac{1}{4}$

5) $\frac{3}{4}$ 6) a) 0,191 b) 0,273 c) 0,670 7) a) $\frac{7}{90}$ b) $\frac{1}{15}$ 8) $\frac{27}{58}$ 9) 0,9144

9.4. Úvod do statistiky

Statistika studuje tzv. hromadné jevy, tj. různé jevy přírodní, společenské a jiné, nikoli však jednotlivě, ale ve velkém počtu případů. Tyto jevy lze různým způsobem kvantifikovat, a je tak možné studovat tzv. statistická data. Jedná se např. o počet obyvatel státu, objem výroby podniku, pohyb velkého počtu molekul v plynu atd. Statistikou se běžně rozumí získávání, zpracovávání a hodnocení těchto dat. **Statistika** jako matematická disciplína je pak vědou o metodách tohoto získávání, zpracovávání a hodnocení.

Statistickým souborem nazýváme množinu všech objektů statistického zkoumání, každý její prvek statistickou jednotkou nebo krátce **jednotkou**. Počet prvků této množiny nazýváme **rozsah souboru** a značíme většinou n . Statistický soubor, který obsahuje všechny prvky přicházející v dané situaci v úvahu, nazýváme **základním souborem**. Tento soubor však většinou není možné zpracovávat pro velký rozsah. Statistická zjišťování se tak většinou provádějí jen na jeho jisté podmnožině - **výběrovém souboru**. Základním statistickým souborem tak může být např. množina všech obyvatel naší republiky, výběrovým souborem pak vhodně vybraný „vzorek“ o rozsahu např. deset tisíc.

Statistický znak je vlastnost prvků statistického souboru, která je předmětem statistického zkoumání (např. rychlost molekuly v plynu). Zpravidla se značí x , konkrétní hodnoty tohoto znaku pak $x_1; x_2; \dots; x_n$.

1. Příklad: Uvažujme množinu šesti lidí s tělesnými výškami (v cm): 164; 168; 170; 173; 179; 180. Statistickým znakem x je zde výška člověka, hodnoty tohoto znaku pak jsou $x_1 = 164$; $x_2 = 168$; $x_3 = 170$; $x_4 = 173$; $x_5 = 179$; $x_6 = 180$.

Četnost hodnoty znaku: V praktických šetřeních se málokdy stává, že každá jednotka má jinou hodnotu znaku. Rozsah statistického souboru se většinou pohybuje ve stovkách nebo i v tisících. Zkoumáme-li např. výšku dospělého člověka, pohybují se hodnoty znaku v rozmezí řekněme 150–210 cm, tj. při měření na celé centimetry asi šedesát hodnot. Podle přihrádkového principu tak musí několik lidí (často velmi mnoho) mít stejnou výšku. Počet hodnot znaku (označme k) je tak menší (nebo nanejvýš roven) rozsahu statistického souboru, tj. $k \leq n$. Počet statistických jednotek n_j , jimž přísluší stejná hodnota znaku x_j pro $j = 1, 2, \dots, k$, se nazývá **(absolutní) četnost hodnoty znaku** x_j . Podíl absolutní četnosti n_j a rozsahu souboru n budeme značit v_j a nazývá se **relativní četnost hodnoty znaku** x_j . Platí

tedy $v_j = \frac{n_j}{n}$ (v praxi se tato hodnota často vyjadřuje v procentech - pak je třeba ji násobit sty procenty).

Součet všech četností je zřejmě rozsah souboru, tj.

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i = n,$$

součet všech relativních četností je roven jedné:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = \sum_{i=1}^k v_i = 1.$$

2. Příklad: Po dvou stech hodech hrací kostkou byla sestavena tato tabulka:

j	x_j	n_j	v_j	v_j v %
1	1	35	0.175	17.5
2	2	33	0.165	16.5
3	3	34	0.170	17.0
4	4	31	0.155	15.5
5	5	33	0.165	16.5
6	6	34	0.170	17.0
		200	1.000	100.0

V tabulce j čísluje hodnoty statistického znaku, touto hodnotou x_j je počet bodů v jednotlivých hodech, četnosti n_j značí kolikrát daný počet bodů padl, relativní četnosti v_j pak podíl na celkovém počtu výsledků, poslední sloupec tuto hodnotu vyjadřuje v procentech.

Skupinové rozdělení četností: často se stává, že rozsah statistického souboru je velký a také počet zjištěných hodnot znaku je značný. Proto se blízké hodnoty statistického znaku sdružují do skupin - **tříd** tvořených obvykle intervaly. Nejčastěji se volí intervaly stejné délky. Získáváme tak skupinové (intervalové) rozdělení četností.

4. Příklad: Byly změřeny výšky dvou set osob a rozděleny do tříd podle následující tabulky:

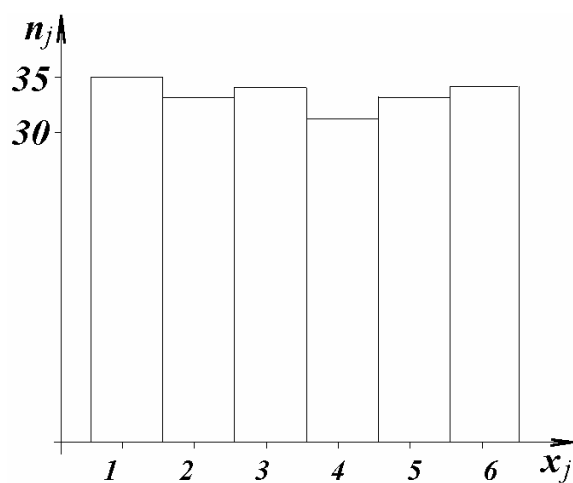
j	Intervaly výšky	střed	četnosti
1	153-157	155	3
2	158-162	160	12
3	163-167	165	25
4	168-172	170	37
5	173-177	175	47
6	178-182	180	37
7	183-187	185	23
8	188-192	190	11
9	193-197	195	4
10	198-202	200	1
Rozsah souboru			200

Grafická znázornění rozdělení četností: Na základě tabulek četností lze rozdělení četností znázornit graficky. Na vodorovnou osu přitom nanášíme hodnoty statistického znaku resp. intervaly tříd a na svislou osu četnosti, resp. relativní četnosti. Nejčastěji používaná grafická znázornění jsou polygon a histogram. Na uvedených obrázcích vlevo jsou znázorněna rozdělení četností z předchozích tří příkladů použitím **histogramu** (sloupcového diagramu).

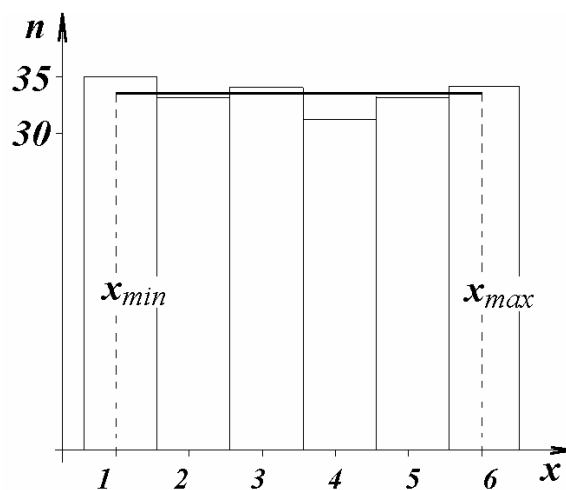
3. Příklad: Bylo provedeno dvě stě hodů devíti mincemi a v jednotlivých hodech počítáno, na kolika mincích padl rub

j	x_j	n_j	v_j	v_j v %
1	0	0	0.000	0.0
2	1	4	0.080	8.0
3	2	22	0.110	11.0
4	3	42	0.210	21.0
5	4	54	0.270	27.0
6	5	42	0.210	21.0
7	6	24	0.120	12.0
8	7	8	0.040	4.0
9	8	4	0.020	2.0
		200	1.000	100.0

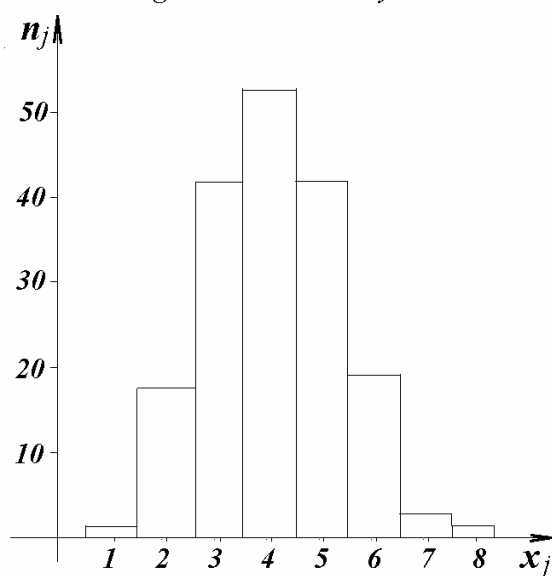
V tabulce je hodnotou x_j je počet rubů v jednotlivých hodech, četnosti n_j značí, kolikrát v daném pokusu rub opravdu padl.



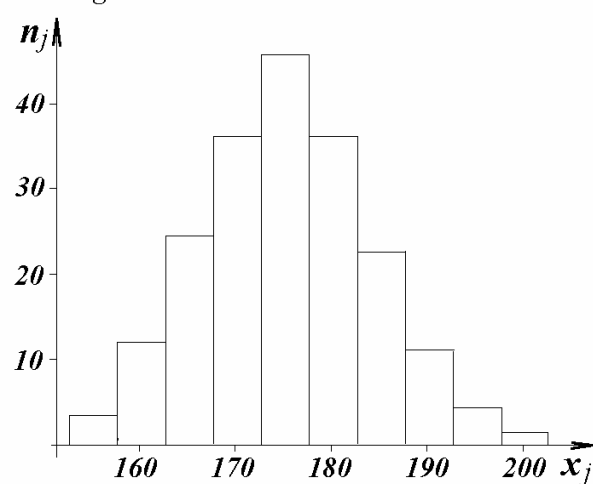
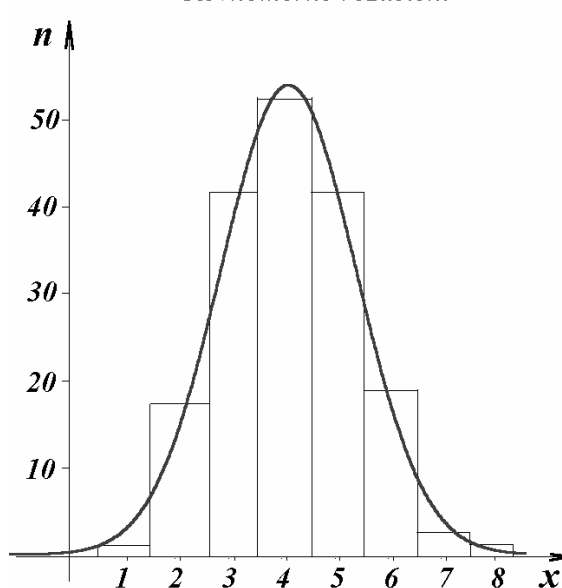
Histogram četností - hody kostkou



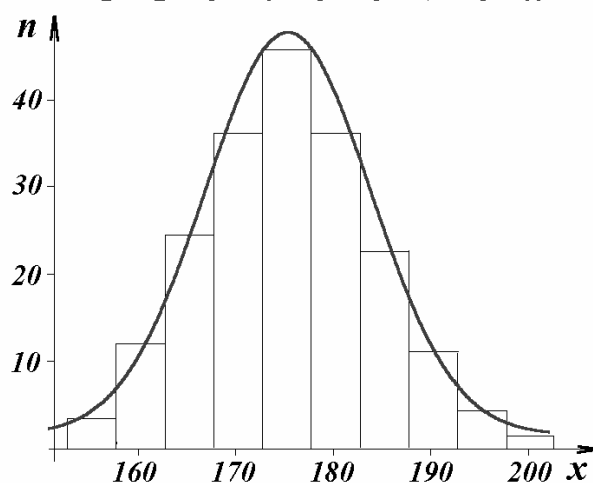
Rovnoměrné rozdělení



Histogram četností - hod několika mincemi



Histogram četností - výška postavy



Nahrazení binomického rozdělení
rozdělením normálním

Jde o množinu obdélníků, jejichž jedna strana odpovídá délce intervalu tříd (ta leží na vodorovné ose) a druhá pak četnosti (leží na svislé ose).

Statistické rozdělení četností je pro řadu zkoumaných jevů charakteristické. Při opakovaných hodech kostkou padají všechny možné výsledky zhruba stejně často, sloupce histogramu jsou

proto zhruba stejně vysoké. Takové rozdělení nazýváme **rozdělení rovnoměrné**. Nejvyšší a nejnižší možná hodnota, tj. $x_{\max}; x_{\min}$ určují tzv. **variační rozpětí**, tj. rozdíl $x_{\max} - x_{\min}$. Při hodu několika mincemi vidíme výrazný vrchol uprostřed a postupné snižování sloupců ke krajním hodnotám. Lze ukázat, že četnosti jednotlivých znaků odpovídají binomickým koeficientům (viz kpt. 9.3.). Proto je takové rozdělení nazýváno **rozdělením binomickým**. Také rozdělení výšek postav při správně provedeném statistickém výběru má toto rozdělení.

Pokud bychom měli k dispozici nekonečný statistický soubor s nekonečně mnoha hodnotami statistického znaku, mohli bychom znázornit jeho rozdělení „plynulou“ (spojitou) křivkou. U rovnoměrného rozdělení by to byla vodorovná úsečka, binomické rozdělení by přešlo v **rozdělení normální**, které je charakterizováno **Gaussovou křivkou** (viz předchozí obrázek).

Statistické charakteristiky: jsou čísla, která podávají stručnou souhrnnou informaci o statistickém souboru.

Aritmetický průměr: $\bar{x}$ hodnot $x_1; x_2; \dots; x_n$ je podíl součtu těchto hodnot a jejich počtu:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

5. Příklad: Student dostal za pololetí z matematiky tyto známky: 2,2,1,4,2,4,3,1,5. Určeme jeho „průměrnou“ známku.

Řešení: zde je $n = 9$; $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$; $x_5 = 2$; $x_6 = 4$; $x_7 = 3$; $x_8 = 1$; $x_9 = 5$. Je tedy:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{9} (2 + 2 + 1 + 4 + 2 + 4 + 3 + 1 + 5) = \frac{24}{9} \approx 2,67.$$

Pokud by tedy učitel použil tuto charakteristiku k celkovému hodnocení, zasloužil by student z matematiky trojku. Dobrý učitel však ví, že takové hodnocení je mnohdy ošidné.

6. Příklad: Student má z matematiky známky 1,1,2,1,1 a z fyziky 3,3. Určeme jeho „průměrnou“ známku z těchto předmětů.

Řešení: Protože $n = 7$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1$; $x_5 = 1$; $x_6 = 3$; $x_7 = 3$, je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 3) = \frac{12}{7} \approx 1,71.$$

Poznámka: Všimněte si, že jsme tento příklad řešili úplně stejně jako předešlý - je úplně jedno, zda tu či onu známku dostal student z matematiky či fyziky.

Pozor na „klasické“ chybné řešení: Průměr známek z matematiky je 1,2, průměr známek z fyziky 3. Průměrná známka je $\frac{1,2+3}{2} = 2,1$. Tento „průměr z průměrů“ je roven aritmetickému průměru pouze v případě, že z obou předmětů dostal student stejný počet známek.

Vážený aritmetický průměr: $\bar{x}$ hodnot $x_1; x_2; \dots; x_n$, kterým jsou přiřazena postupně čísla $v_1; v_2; \dots; v_n > 0$ (váhy hodnot) je podíl

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i x_i}{\sum_{i=1}^n v_i}.$$

7. Příklad: Vraťme se k příkladu 5 a spočítejme průměrnou známku za předpokladu, že z udělených známek je jedna dvojka a jedna jednička ze čtvrtletních písemných prací, které učitel pokládá za čtyřikrát závažnější, než ostatní známky (ty jsou například z destiminutových testů).

Řešení: Opět je $n = 9$; $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$; $x_5 = 2$; $x_6 = 4$; $x_7 = 3$; $x_8 = 1$; $x_9 = 5$; nyní musíme ovšem přiřadit váhy: desetiminutovkám např. jedničku, čtvrtletním pracem pak čtverku, tj.: $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$; $v_5 = 4$; $v_6 = v_7 = 1$; $v_8 = 4$; $v_9 = 1$ a počítat vážený průměr:

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1} = \frac{33}{15} = 2,2$$

a student si najednou zaslouží dvojku.

8. Příklad: Vraťme se k příkladu 6. V poznámce za ním jsme konstatovali, že průměr známek z matematiky je 1,2, průměr známek z fyziky je 3. Zároveň jsme ukázali, že prostý „průměr z těchto průměrů“ není aritmetickým průměrem známek z matematiky a fyziky. Přesto lze tyto průměry k výpočtu použít - musíme však pracovat s jejich průměrem váženým: víme, že průměr 1,2 je průměrem z pěti známek, průměr 3 vznikl ze dvou známek. Považujme průměry za hodnoty znaku, tj. $x_1 = 1,2$; $x_2 = 3$, k těmto hodnotám přiřadíme váhy $v_1 = 5$; $v_2 = 2$ a vypočteme vážený průměr:

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{v_1 + v_2} = \frac{1,2 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{5 + 2} = \frac{12}{7} \approx 1,7$$

Tento průměr souhlasí s průměrem zjištěným v př. 6.

9. Příklad: Vraťme se k příkladu 5. I tento příklad lze řešit váženým průměrem. Hodnotami znaku jsou jednotlivé známky: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; váhami pak jejich četnosti: $n_1 = 2$; $n_2 = 3$; $n_3 = 1$; $n_4 = 2$; $n_5 = 1$. Je tedy

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 + n_5 x_5}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{2 + 3 + 1 + 2 + 1} = \frac{24}{9} \approx 2,67.$$

Modus $Mod(x)$ hodnot $x_1; x_2; \dots; x_n$ je hodnota x_j znaku x , která má nejvyšší četnost.

Medián $Med(x)$ hodnot $x_1; x_2; \dots; x_n$, kde $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, je

a) hodnota $x_{\frac{n+1}{2}}$ pro n liché,

b) hodnota $\frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ pro n sudé.

Mediánem souboru hodnot uspořádaných podle velikosti je tedy pro lichý počet hodnot hodnota prostřední, pro sudý počet hodnot pak aritmetický průměr dvou prostředních hodnot.

9. Příklad: Určeme aritmetický průměr, modus a medián souborů z příkladů 2, 3, 4.

Řešení: Aritmetický průměr zjistíme ve všech případech vážením:

$$\text{př. 2.: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{\sum_{i=1}^6 n_i} = \frac{35 \cdot 1 + 33 \cdot 2 + 34 \cdot 3 + 31 \cdot 4 + 33 \cdot 5 + 34 \cdot 6}{35 + 33 + 34 + 31 + 33 + 34} = \frac{696}{200} = 3,48$$

$$\text{př. 3.: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^9 n_i x_i}{\sum_{i=0}^9 n_i} = \frac{0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 54 \cdot 4 + 42 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8}{0 + 4 + 22 + 42 + 54 + 42 + 24 + 8 + 4} = \frac{832}{200} = 4,16$$

$$\begin{aligned} \text{př. 4.: } \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{10} n_i} = \\ &= \frac{3 \cdot 155 + 12 \cdot 160 + 25 \cdot 165 + 37 \cdot 170 + 47 \cdot 175 + 37 \cdot 180 + 23 \cdot 185 + 11 \cdot 190 + 4 \cdot 195 + 1 \cdot 200}{3 + 12 + 25 + 37 + 47 + 37 + 23 + 11 + 4 + 1} = \\ &= \frac{35\,010}{200} = 175,05 \end{aligned}$$

Modus je hodnota znaku s nejvyšší četností, tj.: př. 2.: $Mod(x) = 1$; př. 3.: $Mod(x) = 4$; př. 5.: $Mod(x) = 175$.

Medián: Rozsah všech souborů je 200 všechny máme uspořádány podle hodnoty znaku.

Mediánem je tedy ve všech případech hodnota $\frac{x_{100} + x_{101}}{2}$.

př. 2.: Součet prvních dvou četností je $n_1 + n_2 = 68$; prvních tří $n_1 + n_2 + n_3 = 102$. Hodnoty $x_{100}; x_{101}$ leží tedy ve třetím intervalu, obě jsou rovny třem, i jejich aritmetický průměr je tedy roven třem. To znamená, že $Med(x) = 3$.

př. 3.: Analogicky máme: $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = 68$; $n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 112$. Hodnoty $x_{100}; x_{101}$ leží tedy v intervalu č. 5, obě jsou rovny čtyřem, i jejich aritmetický průměr je tedy roven čtyřem. To znamená, že $Med(x) = 4$.

př. 4.: Za hodnoty budeme brát středy intervalů. Dále je $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 77$; $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 124$. Hodnoty $x_{100}; x_{101}$ leží tedy v intervalu č. 5, obě jsou rovny číslu 175, i jejich aritmetický průměr je tedy roven 175. To znamená, že $Med(x) = 175$.

Shrňme výsledky předchozího příkladu:

Hody kostkou mají přibližně **rovnoměrné rozdělení**, $\bar{x} = 3,48$; $Mod(x) = 1$; $Med(x) = 3$. U tohoto rozdělení je modus nevhodnou charakteristikou – nejvyšší četnost může mít náhodně kterákoliv hodnota. Aritmetický průměr je vhodný – pohybuje se v blízkosti středu variačního rozpětí, rovněž tak medián.

Hody několika mincemi mají přibližně **binomické rozdělení**, u hodů osmi mincemi je $\bar{x} = 4,16$; $Mod(x) = 4$; $Med(x) = 4$. Všechny tyto charakteristiky jsou vhodné nejen pro toto rozdělení, ale pro každé rozdělení, které je přibližně symetrické a má výraznější maximum. Tyto charakteristiky se pak nacházejí poměrně blízko tohoto maxima. V tomto případě signalizují, že při hodu osmi mincemi je nejpravděpodobnější výsledek čtyřikrát rub a

čtyřikrát líc (na těchto charakteristikách je dokonce založena tzv. statistická definice pravděpodobnosti).

Rozdělení tělesných výšek člověka - stejně jako dalších znaků souvisejících s tělesnými dispozicemi (váha, měřitelné sportovní výkony apod.) je opět přibližně **binomické** a platí tudíž totéž, co v předchozím odstavci. V našem konkrétním případě hodnoty $\bar{x} = 175,05$; $Mod(x) = 175$; $Med(x) = 175$ opět signalizují, že vybereme-li z našeho vzorku náhodně jednoho člověka, pak největší pravděpodobnost má výška 175 cm.

10. Příklad: Platy dvou set učitelů na patnácti školách jsou dány následující tabulkou:

střed int.	11 000	12 000	13 000	14 000	15 000 - 22 000	23 000	24 000	25 000	26 000
četnost	51	76	47	1	0	1	3	11	10

Stanovme aritmetický průměr, modus a medián.

Řešení:

Soubor o rozsahu dvě stě je rozdělen do osmi tříd s nenulovými četnostmi, je tedy

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 n_i x_i}{\sum_{i=1}^8 n_i} = \frac{51 \cdot 11000 + 76 \cdot 12000 + 47 \cdot 13000 + 1 \cdot 14000 + 1 \cdot 23000 + 3 \cdot 24000 + 11 \cdot 25000 + 10 \cdot 26000}{200} = \frac{2728000}{200} = 13640.$$

Modus je roven hodnotě nejpočetnější třídy, tj. $Mod(x) = 12\ 000$, medián je opět roven aritmetickému průměru platů stého a stého prvního učitele, tj. $Med(x) = 12\ 000$.

11. Příklad: V předchozím příkladě se výrazně liší platy pětadvaceti učitelů. Předpokládejme, že čtyři učitelé z nejvyšší platové třídy byli pověřeni mimořádně složitými úkoly, řekněme v souvislosti s akcí internet do škol a že jejich plat vzrostl na 72 000 Kč. Zopakujme předchozí výpočet.

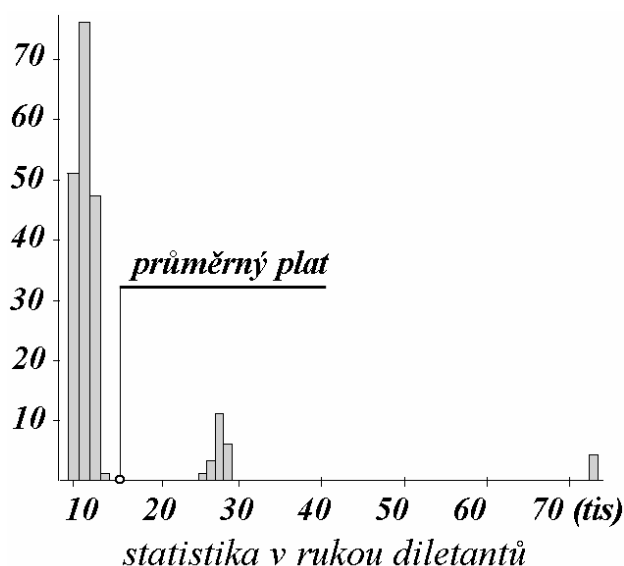
Řešení: Čtyřem učitelům byl zvýšen plat o $72\ 000 - 26\ 000 = 46\ 000$, celková vyplacená suma tedy vzrostla o $4 \cdot (72\ 000 - 26\ 000) = 4 \cdot 46\ 000 = 184\ 000$. Je tedy

$$\bar{x} = \frac{2\ 728\ 000 + 184\ 000}{200} = 14\ 560$$

Modus a medián se nezměnily, tj. $Mod(x) = 12\ 000$; $Med(x) = 12\ 000$.

Vidíme, že změna platu u čtyř učitelů (a to ani značně velká) neměla vliv na modus a medián. Statistické charakteristiky nás mají informovat globálně o celém souboru. Modus a medián skutečně „nenaletěly“ na trik s přidáním čtyřem jedincům. Aritmetický průměr však vyrostl téměř o tisícovku a nevypovídá vůbec o ničem. Proč? Modus již ze své definice informuje o tom, jaký plat je v naší skupině nejpravděpodobnější, medián zase vybírá „prostředního“ učitele. Změna několika málo hodnot speciálně medián nemůže nikdy výrazněji ovlivnit.

Modus je také většinou málo citlivý na „kosmetické změny“. Výjimku tvoří např. přibližně rovnoměrné rozdělení (viz př. 2, kde stačí dva další hody, při nichž náhodou padne šestka).



V předchozích příkladech jsme konstatovali, že aritmetický průměr je použitelný na rozdělení, které je alespoň přibližně symetrické s výraznějším maximem (které musí být tudíž zhruba uprostřed rozpětí). Na připojeném obrázku vidíme histogram rozdělení platů z př. 11. Toto rozdělení je naopak extrémně nesymetrické s výrazným maximem u spodní hranice platů. V příkladu 10 se v blízkosti průměru pohyboval ze dvou set učitelů jeden jediný. Přidáním čtyřem učitelům ze dvou set v příkladu 11 stoupl celkový průměr téměř o tisíc korun a tento fantasmagorický plat nepobírá už vůbec nikdo. Až na několik šťastných jedinců se všichni se svými příjmy nacházejí podstatně

níže. V praktických případech sice není většinou situace tak extrémní jako v našich modelových příkladech, speciálně u mezd je však toto rozdělení dosti typické.

Ve všeobecném povědomí je **zakořeněn názor**, že aritmetický průměr je hodnota, kterou má většina prvků statistického souboru - např. **průměrný plat je plat, který má většina pracovníků**. Předchozí příklady však ukázaly, že **tento názor je hluboce mylný**. Může být dokonce zneužit k manipulaci s veřejným míněním. Úředník zodpovědný za platy ve škoství může prohlásit, že plat vzrostl průměrně o 920,-- Kč. Méně informovaný občan si tuto informaci dokonce ochotně a téměř automaticky přeloží ve větu „všichni učitelé dostali přidáno 920,-- Kč“. Přitom částka 920,-- Kč je jen náhodné seskupení číslic a pojem „přidání“ je zde stejně absurdní jako průměr sám.

Neřešené úlohy:

1) U šesti „stejných“ strojních součástí byly změřeny hmotnosti v kg: 11,5; 12,2; 12,4; 12,2; 11,8; 11,9. Určete **a)** aritmetický průměr **b)** medián.

2) „Stejně“ strojní součástky byly rozděleny podle své délky do osmi tříd:

Střed intervalu (cm)	7,345	7,445	7,545	7,645	7,745	7,845	7,945	8,045
četnost	1	1	1	11	17	9	3	1

Určete **a)** aritmetický průměr **b)** medián **c)** modus.

3) Příjmy jisté skupiny obyvatel jsou dány tabulkou:

střed intervalu	8 000	9 000	10 000	11 000	12 000	13 000	14 000	15 000	16 000
četnost	126	112	98	95	101	42	35	24	10

Určete **a)** aritmetický průměr **b)** medián **c)** modus.

Výsledky:

1) **a)** 120 **b)** 120.5 **2) a)** 7.740 **b)** 7.745 **c)** 7.745 **3) a)** 10 589 **b)** 10 000 **c)** 8 000.